EDITAL 02/2026 – PROVA ESCRITA

CAMPUS: Nova Friburgo
Área de Conhecimento: Matemática

Questão 1 (2,0 pontos)

Sejam $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Considere a equação diferencial linear de primeira ordem:

$$y' + a(t)y = b(t).$$

(a) Determine uma função $\psi(t) \in C^1$ tal que, ao multiplicar a equação por $\psi(t)$, a equação resultante seja uma equação exata, verificando explicitamente que essa propriedade é satisfeita. Em seguida, expresse a solução geral em termos de $\psi(t)$ e $b(t)$. Mostre que toda solução pode ser escrita na forma

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t),$$

onde y_p é uma solução particular da equação não homogênea e y_h é solução da equação homogênea associada.

(b) Suponha que

$$\lim_{t \to +\infty} a(t) = c > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to +\infty} b(t) = L.$$

Mostre que toda solução $y(t)$ admite limite quando $t \to +\infty$ e determine esse valor.

Nº

Questão 2 (2,0 pontos)

Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Seja $c > 0$ uma constante fixada e defina a variável aleatória $Y = \min(X, c)$.

(a) Determine a função de distribuição F_Y de Y, justificando a passagem entre eventos e identificando explicitamente seus pontos de descontinuidade, se existirem.

(b) Determine a decomposição da distribuição de Y nas componentes discreta e absolutamente contínua, escrevendo $F_Y = F_d + F_{ac}$, e verifique se há componente singular.

(c) Determine $E[Y]$ e discuta o impacto da transformação $Y = \min(X, c)$ sobre a existência e o valor da esperança, comparando-a explicitamente com a existência e o valor de $E[X]$.

Nº

Questão 3 (2,0 pontos)

Seja $T : V \to W$ um operador linear entre dois espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo K.

(a) Defina a noção de núcleo ($\mathrm{Nuc}(T)$) e de imagem ($\mathrm{im}(T)$) do operador linear T. Mostre que ambos os conjuntos são subespaços vetoriais dos respectivos espaços ambientes. Mostre que o operador linear T é injetivo se, e somente se, $\mathrm{Nuc}(T) = \{0\}$.

(b) Enuncie e prove o Teorema do Núcleo e da Imagem.

(c) Mostre que se T é injetivo, então $\dim V \leq \dim W$. Mostre também que se T é sobrejetivo, então $\dim V \geq \dim W$.

Nº

Questão 4 (2,0 pontos)

Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, $f : U \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável.

(a) Enuncie o critério da Hessiana, também conhecido como teste da segunda derivada, para classificar os possíveis pontos críticos de f.

(b) Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x) = x^4 + y^4 - 4x^2 - 4y^2 + 6xy.$$

(Dica: use as fatorações $(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ e $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.)

(c) Existe um teorema análogo àquele enunciado no item (a) para funções com mais de duas variáveis? Se sim, enuncie este teorema.

Nº

Questão 5 (2,0 pontos)

Considere o problema de determinação de raízes reais de uma função não linear $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f \in C^2$ em um intervalo contendo uma raiz simples.

(a) Descreva os métodos da *secante* e da *regula falsi* (falsa posição) para a localização de raízes, apresentando suas formulações iterativas. Demonstre as condições de convergência de cada método e determine suas ordens de convergência, discutindo as diferenças em relação a métodos clássicos baseados em derivadas.

(b) Considere a equação

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Aplique manualmente as primeiras iterações dos métodos da secante (com $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$) e da *regula falsi* (com intervalo inicial $[1, 2]$), e analise qualitativamente a convergência obtida.

(c) Apresente um pseudocódigo para um dos métodos e realize uma análise de complexidade computacional, considerando o custo por iteração e o número esperado de iterações para atingir uma precisão ε. Compare-o com o método de Newton-Raphson, discutindo o *trade-off* entre custo por iteração e taxa de convergência.

Nº